## *Mathématiques Problème* Option T Durée : 4 heures

Le but du problème est d'étudier quelques propriétés de la fonction J, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par la relation :

$$(1) \qquad J(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin\theta)\, d\theta \ .$$

### I

Pour tout entier $n \geqslant 0$ on définit l'intégrale :

$$(2) \qquad I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^n d\theta \ .$$

1°) Montrer que la suite $(I_n)$ est décroissante et convergente. Montrer qu'elle vérifie la relation de récurrence :

$$(3) \qquad nI_n = (n-1)I_{n-2} \quad \text{pour } n \geqslant 2 \ .$$

2°) Déduire de ce qui précède les relations suivantes :

a) La suite $(nI_n I_{n-1})$ est constante ;

b) $I_n \sim I_{n-2}$ et $I_n \sim I_{n-1}$ .

Déterminer la limite de la suite $(I_n)$.

3°) Donner la valeur de $I_{2p}$ et $I_{2p+1}$ en fonction de p (on exprimera ces valeurs à l'aide de factorielles).

### II

1°) Rappeler le développement en série entière de la fonction : $t \longmapsto \cos t$.
En déduire que J admet un développement en série entière de la forme :

$$(4) \qquad J(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x^{2k} \ .$$

Exprimer les coefficients $\alpha_k$ à l'aide des $I_{2k}$. Préciser le rayon de convergence de cette série.

2°) Montrer alors que J est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle :

$$(5) \qquad xy'' + y' + xy = 0 \ .$$

3°) Déterminer toutes les solutions développables en série entière de l'équation (5).

III

On définit la fonction F, de $\mathbb{R}+$ dans $\mathbb{R}$, par la relation :

$$(6) \qquad F(x) = x^{\frac{1}{2}} J(x) \ .$$

1°) Déduire de (5) une équation différentielle vérifiée par F, pour $x > 0$.

2°) Soit G la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $G(x) = \sin x$. En remarquant que $G'' + G = 0$, montrer que pour tout $x > 0$ :

$$(7) \qquad F''(x)G(x) - F(x)G''(x) = - \frac{F(x)G(x)}{4x^2} \ .$$

3°) En déduire que pour tout entier $k > 0$ :

$$(8) \qquad F((k+1)\pi) + F(k\pi) = (-1)^{k+1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{F(x) \sin x}{4x^2} \, dx \ .$$

4°) Montrer que, si on suppose que F ne s'annule pas dans l'intervalle $]k\pi, (k+1)\pi[$ (k entier $> 0$), la relation (8) entraîne une contradiction.
Conclure quant à l'existence de racines de l'équation $J(x) = 0$.

IV

Pour tout entier $p \geqslant 0$ et tout réel on pose :

$$(9) \qquad \begin{cases} K_{2p}(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin \theta)(\sin \theta)^{2p} \, d\theta \\ K_{2p+1}(x) = \int_0^{\pi/2} \sin(x \sin \theta)(\sin \theta)^{2p+1} \, d\theta \end{cases} .$$

1°) x, h et t étant des nombres réels, démontrer les inégalités :

(10) $\quad |\cos(x+h)t - \cos xt + ht \sin xt| \leqslant \frac{h^2 t^2}{2}$ ,

(11) $\quad |\sin(x+h)t - \sin xt - ht \cos xt| \leqslant \frac{h^2 t^2}{2}$ .

2°) En étudiant : $\frac{J(x+h) - J(x)}{h} + K_1(x)$ , montrer que $J' = -K_1$ .

3°) Exprimer de la même façon la dérivée $J^{(n)}$ à l'aide de $K_n$. Calculer $J^{(n)}(0)$ .

4°) En déduire la majoration $|J^{(n)}(x)| \leqslant I_n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ . Que peut-on en conclure pour la suite de fonctions $(J^{(n)})$ ?

## V

Pour tout réel $a > 1$, et tout entier $n \geqslant 0$ on pose :

(12) $\quad L_n(a) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} J^{(n)}(x)\, dx$ .

1°) Justifier la convergence de l'intégrale $L_n(a)$ .

2°) Pour tout entier $n \geqslant 0$ on pose :

(13) $\quad L_0(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{J^{(k)}(0)}{a^{k+1}} + R_n(a)$

Déterminer un majorant de $|R_n(a)|$ et en déduire l'expression de $L_0(a)$ sous forme de la somme d'une série entière en $\frac{1}{a}$ .

3°) Rappeler le développement en série entière de la fonction : $t \longmapsto (1+t)^{-\frac{1}{2}}$ et en déduire la valeur de $L_0(a)$ .